

考研数学 · 线性代数

经典范例 25 题

主讲：清华大学李永乐副教授

地点：东南大学健雄院致知堂

时间：2002 年 1 月 1 日上午 8: 00 - 12: 30

整理：Yac Yin

1、已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 求 $|(2A)^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答: $|(2A)^{-1}| = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n-1)}$

解法一: $\because |kA| = k^n |A|$

$\therefore \text{原式} = \left| \frac{1}{2} A^{-1} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^n |A^{-1}| = \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{|A|}$

解法二: 原式 = $\frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^n |A|}$

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1)$$

特殊解法:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - E$$

如 $r(A) = 1$ 时, $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda^{n-1}$

2、已知 A 为四阶矩阵, 且 $|(2A)^*| = -64$, 求 $|A| =$ _____。

解答: $|A| = -\frac{1}{4}$

解法一: $\because (kA)^* = k^{n-1} A^* \text{ \& } |A^*| = |A|^{n-1}$

$$\therefore |(2A)^*| = |2^3 A^*| = 8^4 |A^*| = 8^4 |A|^3 = -64$$

解法二: $|(2A)^*| = |2A|^3 = (2^4 |A|)^3 = 8^4 |A|^3 = -64$

3、已知 $A \sim B$ (“ $A \sim B$ ” 表示 A 、 B 两矩阵为相似矩阵, 下同), 且均为四阶矩阵, B^* 的特征值为: 1、-1、2、4, 求 $||A|A^T|$ _____。

解答: $||A|A^T| = -32$

解法: 原式 $= ||A|A^T| = |A|^4 |A^T| = |A|^5 = |B|^5$

$$\therefore |A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\therefore |B^*| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1 \times (-1) \times 2 \times 4 = -8$$

$$\therefore |B^*| = |B|^{n-1}$$

$$\therefore |B|^3 = |B^*| = -8$$

4、已知 $A^* = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -8 & 4 & -1 \\ -7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $A =$ _____。

解答: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

解法: $\because AA^* = A^*A = |A|E$

$$\therefore \frac{A^*}{|A|} A = A \frac{A^*}{|A|} = E$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$\therefore A = |A| (A^*)^{-1}$$

用初等行变换求逆:

①、行乘数

②、交换行

③、相加减

现简述求解过程如下:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 10 & -10 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

5、已知 A 、 B 两个矩阵均为 N 阶矩阵, 且 $(A+B)^2 = E$, 其中 A 为对称矩阵且可逆, 求

$$(A^{-1}B+E)^{-1}(B^T A^{-1}-E)^T = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解答: } (A^{-1}B+E)^{-1}(B^T A^{-1}-E)^T = (B+A)(B-A)$$

注意: 此题做到 $(B+A)(B-A)$ 这一步即可, 不必再画蛇添足。

$$\text{解法: 原式} = (A^{-1}B+A^{-1}A)^{-1}[(B^T A^{-1})^T - E^T] = [A^{-1}(B+A)]^{-1}[(A^{-1})^T (B^T)^T - E]$$

$$= (B+A)^{-1} A (A^{-1}B-E)$$

$$\because (A+B)^2 = E$$

$$\therefore (A+B) = (A+B)^{-1}$$

$$\therefore \text{原式} = (B+A)(B-A)$$

总结: 矩阵的求逆与转置的异同表

	求逆	转置
相同	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^T)^T = A$
	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(AB)^T = B^T A^T$

不同	$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$	$(kA)^T = kA^T$
	-	$(A+B)^T = A^T + B^T$
特别	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	

6、已知 A 、 B 、 A^* 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB = 0$ ，则 $r(B) =$ _____。

解答： $r(B) = 1$

解法一： 与齐次线性方程组挂钩

$\because B$ 的列向量是 $Ax = 0$ 的解

$$\therefore A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$$

解法二： 运用公式 $r(A) + r(B) \leq n$

$\because B \neq 0$ 、 $AB = 0$

$$\therefore |A| = 0$$

$$\because A^* \neq 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} \end{bmatrix} = 0, \exists A_{ij} \neq 0, \text{ 且 } n-1 \text{ 阶不为零。}$$

$$\therefore r(A) = n-1$$

$$\therefore r(A) + r(B) \leq n$$

$$\therefore r(B) \leq 1$$

$\because B$ 为 n 阶非零矩阵，

$$\therefore r(B) \geq 1$$

$$\therefore r(B) \equiv 1$$

7、已知 A 为 4×3 阶矩阵，且非零， $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ，且 $AB = 0$ ，则 $Ax = 0$ 的通解是_____。

解答： $k_1() + k_2()$ ，其中 $()$ 中为任意两个 B 的列向量。

解法： $\because r(A) + r(B) \leq 3$

$$\text{又 } \because r(B) = 2$$

$$\therefore r(A) \leq 1$$

又 $\because A$ 为非零矩阵

$$\therefore r(A) = 1$$

$\therefore A$ 的解为 $3 - 1 = 2$ (个)

$\therefore Ax = 0$ 的通解是 $k_1(\quad) + k_2(\quad)$, 其中 (\quad) 中为任意两个 B 的列向量。

$$8. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 3 & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 且 } \left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 12E, \text{ 求 } B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解答: } B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 3 & 1.5 \\ 3 & -1.5 & 1.5 & -2.25 \\ 6 & -3 & -3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{解法: } \left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 A^* \right]^{-1} = 8(A^*)^{-1} = 8 \frac{A}{|A|}$$

$$\therefore |A| = 2$$

$$\therefore \left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} = 4A$$

$$\therefore \left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 12E \Rightarrow 2ABA^{-1} = AB + 6E \Rightarrow 2BA^{-1} = B + 6A^{-1} \Rightarrow 2B = BA + 6E$$

$$\Rightarrow 2B - BA = 6E \Rightarrow B(2E - A) = 6E \Rightarrow B = 6(2E - A)^{-1}$$

$$\therefore B = 6(2E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 3 & 1.5 \\ 3 & -1.5 & 1.5 & -2.25 \\ 6 & -3 & -3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

总结: 二阶矩阵的转置矩阵的简易公式 (不适用于本题, 且仅限于二阶矩阵)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

9、已知 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, $r(A) = n$, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, 证明: $r(AB) = r(B)$

注意: 此题的结论可以当作定理记下来。

分析: 构造下面两个辅助方程组

$$ABx = 0 \quad S = r(AB) \quad \text{①}$$

$$Bx=0 \quad S=r(B) \quad \textcircled{2}$$

要证明 $r(AB)=r(B)$ ，则只要证明上面两个方程同解即可。

$$\text{如 } B\alpha=0 \Rightarrow AB\alpha=A \cdot 0=0$$

则②式的解亦是①式的解

证明： $\because r(A)=n$ （满秩） $\Leftrightarrow A$ 的列向量线性无关

$$\Leftrightarrow \text{如果 } k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0, \text{ 则必有 } k_1=0, k_2=0, \cdots, k_n=0$$

$$\Leftrightarrow \text{方程 } Ax=0 \text{ 只有零解}$$

$\because AB\alpha=0$ ，由 $r(A)=n$ 和方程 $Ax=0$ 只有零解可得： $B\alpha=0$

\therefore 方程 $B\alpha=0$ 的解亦是方程 $AB\alpha=0$ 的解

派生一题： 已知 $A^T A\alpha=0$ 且 $A\alpha=0$ ，求证：

$$\alpha^T A^T A\alpha = \alpha^T \cdot 0 = 0$$

提示： $(A\alpha)^T (A\alpha) = 0$